PRIMER PARCIAL **CÁLCULO NUMÉRICO** 1-9-2010

- Duración del examen: 2 horas
- La nota del examen será la media de la nota de los problemas planteados. Los problemas puntúan lo mismo.
- Fecha prevista de publicación de notas: 13-septiembre -2010
- Los alumnos que deseen revisar su examen deberán solicitarlo por escrito los días 14 y 15 de Septiembre (de 9:00 a 14:00 horas) en el despacho D-5210. La revisión en presencia del alumno será el día 17 de Septiembre a las 13 horas en la Sala de Reuniones 2, situada junto a D.5208.

1^er^ Problema

a) (5 puntos) Determinar los valores de *a, b, c* de manera que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3+x-9x^2, x\in[0,1] \\ a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, x\in[1,2] \end{cases}$$

sea un spline cúbico con nodos $x_o=0, x_1=1, x_2=2$

b) (5 puntos) ¿Se puede convertir la función f(x) en un spline cúbico natural? Indicar el valor que debería tomar el parámetro *d*.

2º Problema

Se quiere aproximar la función $f(x)=\cos\pi x$ en el intervalo [-1,1] por una recta r(x), siguiendo diferentes estrategias:

1. (3.5 puntos/10 puntos) Calcular $r_1(x)$, polinomio de primer grado, mejor aproximación mínimos cuadrados discreta de f en los puntos $\{-1,0,1\}$.

2. (3.5 puntos/10 puntos) Calcular $r_2(x)$, polinomio de primer grado, mejor aproximación mínimos cuadrados de f respecto del producto escalar

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

3. (3 puntos/10 puntos) Calcular $r_3(x)$, polinomio de primer grado pasando por el punto (0,0.5), que sea la mejor aproximación mínimos cuadrados de f respecto del producto escalar dado en el apartado anterior. Si E_2 y E_3 representan las normas de los errores cometidos a lo largo del intervalo [-1,1] al aproximar la función original por los polinomios $r_2(x)$ y $r_3(x)$, respectivamente ¿cuál de estos valores es menor? Justificar la respuesta.

3^{er} Problema

Dada la ecuación:

$$\cos x + 1 - 2x = 0$$

Se pide:

a) Demostrar que sólo tiene una raíz real y está en el intervalo $[0,1]$

b) Para resolver la ecuación anterior se utiliza el método iterativo:

$$x_{k+1} = \frac{\cos x_k + 1}{2}; \ k = 0,1,2,...$$

Demostrar la convergencia global del método en el intervalo $[0,1]$

c) Calcular el número mínimo de iteraciones a realizar para obtener la solución de la ecuación con al menos *tres* cifras decimales exactas. Utilizar el valor inicial $x_o = 0$ y el obtenido en la primera iteración.

SOLUCIONES

1^{er} Problema

a)
Continuidad en nodo interior: -5=a
Continuidad primera derivada en el nodo interior: -17=b
Continuidad segunda derivada en el nodo interior -18=2c → c=-9

c) La función f(x) nunca podrá ser un spline natural ya que $S_0''(x_0) = 0$ nunca se puede dar. Si pudiera ser un spline cúbico natural el cálculo del parámetro d sería de la siguiente manera:

$$S_1''(x_2) = 0 \Longleftrightarrow -18 + 6d = 0 \Longleftrightarrow d = 3$$

2º Problema

1. Se considera el producto escalar discreto

$$\langle f, g \rangle_{discreto} = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Para dicho producto escalar se verifica que $\langle 1, x \rangle_{discreto} = 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de la Proyección Ortogonal, se concluye que la mejor aproximación mínimos cuadrados discreta pedida es $r_1(x) = ax + b$, con

$$a = \frac{\langle \cos \pi x, x \rangle_{discreto}}{\langle x, x \rangle_{discreto}} = 0$$

$$b = \frac{\langle \cos \pi x, 1 \rangle_{discreto}}{\langle 1, 1 \rangle_{discreto}} = -1/3.$$

Resultando $r_1(x) = 1$.

2. Se considera la base $\{1, x\}$ de polinomios de grado 1. Se verifica que $\langle 1, x \rangle = 0$, por tanto es una base ortogonal. Aplicando el Teorema de la Proyección Ortogonal, se concluye que la mejor aproximación mínimos cuadrados pedida es $r_2(x) = ax + b$, con

$$a = \frac{\langle \cos \pi x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x \cos \pi x dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0$$

$$b = \frac{\langle \cos \pi x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \cos \pi x dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0.$$

Resultando $r_2(x) = 0$.

3. Se considera el conjunto de funciones aproximantes de tipo polinomial de grado 1 y cuya gráfica pasa por el punto (0, 0.5). Esto es, se consideran funciones de la forma $r_3(x) = ax + 0.5$.

Sea $r_3(x) = ax + 0.5$ la mejor aproximación mínimos cuadrados de la función f(x) dada. Esto es lo mismo que decir que la función $s(x) = r_3(x) - 0.5 = ax$ es la mejor aproximación mínimos cuadrados de la función $f(x) - 0.5$. Por tanto, aplicando el Teorema de la Proyección Ortogonal se obtiene

$$a = \frac{\langle \cos \pi x - 0.5, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} (\cos \pi x - 0.5) x dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0.$$

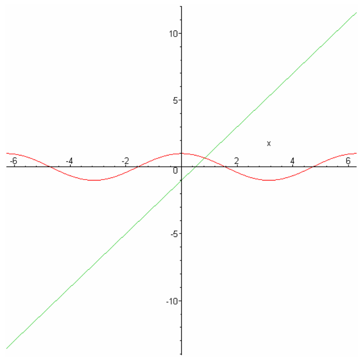
Resultando $r_3(x) = 0.5$.

Se verifica que $E_2 \leq E_3$, porque el conjunto de funciones aproximantes consideradas en el apartado 2 (tipo r_2(x)) contiene al conjunto de funciones aproximantes consideradas en el apartado 3 (tipo r_3(x)). Es mas, se puede afirmar que $E_2 < E_3$, al no ser la función obtenida en el apartado 2 del tipo de las funciones admisibles en el apartado 3.

<u>NOTA</u>: Se hace notar que las integrales que hay que calcular a lo largo del problema son de gran simplicidad, por las propiedades de simetría respecto de 0 de las funciones que hay que integrar (funciones pares e impares).

3^{er} Problema

a) La ecuación $\cos(x)+1-2x=0$ se puede poner como $\cos(x)=2x-1$ y las raíces de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de corte de la curva $y_1=\cos(x)$ y de la recta $y_2=2x-1$



Demostrado gráficamente que la ecuación tiene sólo una raíz real, vamos a demostrar analíticamente que está en el intervalo $[0,1]$

- $f(x)=\cos(x)+1-2x$ es una función continua $\forall x\in[0,1]$
- $f(0)f(1)<0$

Por el teorema de Bolzano la única raíz está en el intervalo $[0,1]$

b) El método iterativo $x_{k+1}=\dfrac{\cos(x_k)+1}{2}$; $k=0,1,2...$ implica la ecuación de punto fijo ($x=g(x)$) $x=\dfrac{\cos(x)+1}{2}$ equivalente a la dada, con $g(x)=\dfrac{\cos(x)+1}{2}$

<u>Teorema de convergencia global en un intervalo</u> $[a,b]$(Teorema del punto fijo)

Si $g(x)\in C^1[a,b]$ y cumple:

- $|g'(x)|\le L<1;\quad \forall x\in[a,b]$
- $g([a,b])\subset[a,b]$,es decir, $g(x)\in[a,b];\quad \forall x\in[a,b]$

Existe un único $s\in[a,b]$ tal que $s=g(s)$ y se halla como límite de la sucesión $x_{k+1}=g(x_k)$ con $x_0\in[a,b]$ arbitrario.

En nuestro caso:

- $g(x)=\dfrac{\cos(x)+1}{2}$ y $g'(x)=\dfrac{-sen(x)}{2}$ son ambas funciones continuas en $[0,1]$

$|g'(x)|=\left|\dfrac{-sen(x)}{2}\right|=\dfrac{sen(x)}{2};\ \forall x\in[0,1]$

$|g'x|\le\dfrac{sen1}{2}=0.420735;\ \forall x\in[0,1]$ La función $g(x)$ cumple la 1^a condición del teorema con $L=0.420735<1$

- $g(x) = \dfrac{\cos(x)+1}{2}$ es positiva y decreciente en $[0,1]$ (tiene un máximo en $x = 0$) $g(0) = 1$ y $g(1) = 0.770151$, cumpliéndose que $g([0,1]) = [0.770151,1] \subset [0,1]$ Así la función $g(x)$ verifica también la 2ª condición del teorema y el método $x_{k+1} = \dfrac{\cos(x_k)+1}{2}$; $k = 0,1,2...$ converge a la solución de la ecuación $\cos(x)+1-2x = 0$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$

c) Cota del error $|e_k| \le |x_1 - x_0| \dfrac{L^k}{1-L} \le 0.5 \cdot 10^{-3}$

Tomando $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $L = 0.420735$

$\dfrac{0.420735^k}{0.579265} \le 0.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow k \ge 6.75...$

Por tanto el número mínimo de iteraciones a realizar es 7